

Article

Análisis de estabilidad de convertidores de segundo orden con la metodología de optimización de suma de polinomios cuadráticos *

Jhon Jairo Herrera-Pérez, Alejandro Garcés-Ruiz

¹ Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

✉jhaherrer@utp.edu.co, alejandro.garces@utp.edu.co

Received: 13 February 2020; Accepted: 27 March 2020; Published: 17 December 2020

Abstract: This paper presents a non-linear method based on sum-of-squares (SOS), to determine the stability of equilibrium points for the Buck, Boost, Buck-Boost and No inductor Buck-Boost converters. These converters share a similar structure with a PI controller to regulate the output voltage. A quadratic Lyapunov function is proposed in all cases, and the conditions for stability are evaluated using convex optimization based on SOS models. The methodology is useful for academic purposes but also in practical applications like DC microgrids. Simulation results shows the advantages of the proposed method.

Keywords: Optimization algorithms, direct current networks, Buck, Boost, DC-DC converter, DC microgrid, second order converter, Lyapunov, Sum of squares, Stability.

Resumen: Este documento presenta un método para determinar la estabilidad de los convertidores de segundo orden como lo son el convertidor Buck, Boost, Buck-Boost y el Buck-Boost no inductor con control PI, mediante el uso de suma de cuadrados, (Sum Of Squares, SOS). Con el uso del método SOS se garantiza la obtención de una función cuadrática de Lyapunov para cada convertidor, garantizando así la estabilidad de los mismos. Esta metodología es útil tanto para el ámbito académico como para futuras implementaciones de micro-redes DC.

Palabras claves: Algoritmo de optimización, Red de corriente directa, Buck, Boost, convertidor DC-DC, micro-red DC, convertidor de segundo orden, Lyapunov, Suma de cuadrados, estabilidad.

1. Introducción

Con la instauración de la ley 143 de 1993, el gobierno de Colombia se ve obligado a garantizar la cobertura del servicio de energía eléctrica a todos sus ciudadanos, por ello el sistema interconectado nacional (SIN) hace constantes proyecciones para la expansión del sistema, sin embargo la topología del país y diversos problemas socio-económicos impiden que gran parte de las poblaciones rurales se conecte al SIN. Por esto en 1999 se crea el instituto de planificación y promoción de soluciones energéticas para

*How to cite this article: Herrera-Pérez, J., Garcés-Ruiz, A. (2020). Análisis de estabilidad de convertidores de segundo orden con la metodología de optimización de suma de polinomios cuadráticos. *Transactions on Energy Systems and Engineering Applications*, 1(1), 49-58. DOI: 10.32397/tesea.vol1.n1.4 ISSN: 2745-0120

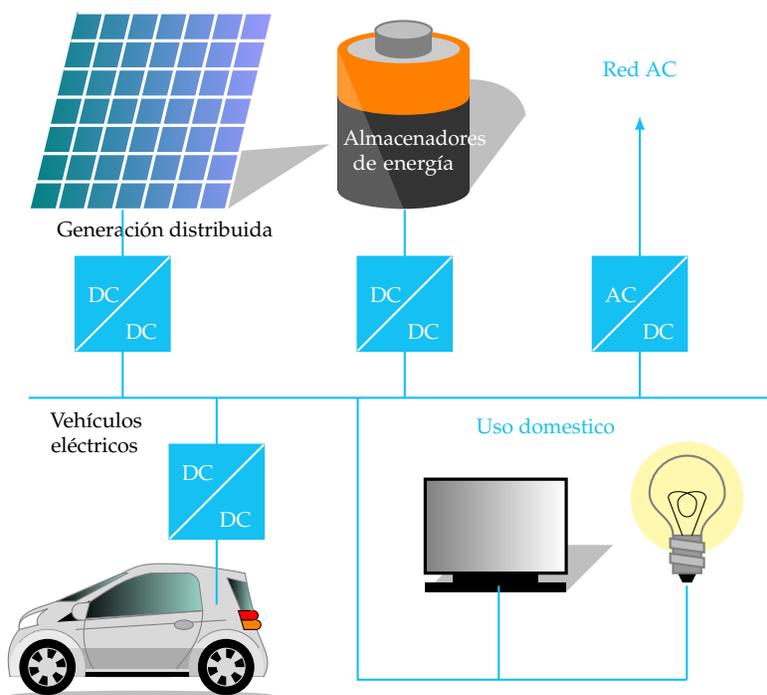


Figure 1. Diagrama esquemático de una micro-red DC

zonas no interconectadas (IPSE), para planear soluciones alternativas a la conexión con el SIN y así poder prestar servicio eléctrico a las zonas no interconectadas (ZNI).

Para solucionar el problema de la falta de prestación de servicios en lugares lejanos del territorio surge la posibilidad de crear micro-redes que aprovechen los recursos de generación de cada zona y así evitar el uso de hidrocarburos. Los sistemas de distribución modernos incluyen energía renovable, dispositivos de almacenamiento de energía y cargas controlables. La mayoría de estas tecnologías se pueden operar en DC y por lo tanto, se pueden integrar en una micro-red netamente DC como se muestra en la figura 1.

Una micro-red DC presenta alta eficiencia, confiabilidad y controlabilidad (Lopes et al. 2013) debido al uso de convertidores electrónicos de potencia DC-DC permitiendo controlar el voltaje y agregar una capacidad *Plug and play* a la red (Joseph et al. 2017; Sadabadi et al. 2017). Cabe resaltar que existen diferentes topologías de convertidores DC-DC, sin embargo, los más comunes son los convertidores Buck, Boost, Buck-Boost y Buck-Boost no inversor. Estos convertidores están muy extendidos en aplicaciones de micro-red DC como en la integración de paneles solares, dispositivos de almacenamiento de energía y cargas, además comparten una estructura similar de modelo dinámico de segundo orden, por tanto, es posible estudiar todos estos convertidores de forma similar.

El análisis de estabilidad es una preocupación importante en las aplicaciones de micro-redes debido al efecto de la resistencia negativa dada por cargas de potencia constantes (Garcés 2019). Por tanto, se requiere desarrollar nuevos métodos de análisis de estabilidad considerando las características intrínsecas de los controles convencionales. La dinámica no lineal del convertidor boost debido al efecto de conmutación se estudió en (Shang et al. 2015). En (Li et al. 2016), se adopta como método para estudiar la estabilidad de señales grandes con un producto semitensorial de matrices con estabilidad de Lyapunov para un convertidor Buck, encontrando que el convertidor Buck tiene un buen comportamiento de estabilidad de señales grandes. En (Li et al. 2017), se considera la posible inestabilidad debida a la interacción entre los convertidores y se propone un análisis basado en la teoría de Floquet. Estos enfoques se centran en convertidores particulares y tipos particulares de controles. Sin embargo, existe una falta de generalidad,

requerida en aplicaciones de la micro-red de DC donde se pueden conectar diferentes convertidores electrónicos de potencia.

Una forma de analizar la estabilidad de los sistemas dinámicos es utilizando herramientas de optimización convexa. Por ejemplo, es posible analizar sistemas lineales usando programación semidefinida (por ejemplo, usando desigualdades de matriz lineal o LMI (VanAntwerp and Braatz 2000)). Investigaciones recientes han demostrado el uso de la función convexa para el análisis de estabilidad de la micro-red DC (Garcés 2019) y para encontrar el punto de equilibrio (Garcés and Montoya 2019). Otro enfoque es el uso de suma de cuadrados como se presenta en (Blekherman et al. 2012). En este caso, es posible estudiar sistemas no lineales y encontrar una función candidata de Lyapunov.

Este artículo presenta un análisis de estabilidad no lineal, general para convertidores de segundo orden, basado en la función de Lyapunov obtenida con el método de suma de cuadrados. Se propone una función de Lyapunov cuadrática para cada caso, y las condiciones de estabilidad se obtienen mediante un algoritmo de optimización convexa. La principal ventaja de este método radica en su generalidad, ya que el mismo método se aplica a cuatro tipos diferentes de convertidores. Además, el método convierte el análisis dinámico en un problema de optimización que se puede resolver numéricamente. Por tanto, se puede implementar fácilmente como herramienta computacional.

El documento está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 describe el modelo dinámico de cada convertidor en el espacio de estados, los principios de la función convexa y la suma de cuadrados se explican en la Sección 3, la sección 4 estudia la estabilidad de los convertidores de segundo orden y posterior a esto, en la Sección 5 se muestran los parámetros de la simulación con los respectivos resultados numéricos, finalmente la Sección 6 presenta las conclusiones seguidas de referencias relevantes.

2. Análisis de estabilidad de convertidores DC-DC

2.1. Modelo dinámico

Para estudiar la estabilidad de los convertidores es necesario obtener las ecuaciones diferenciales que describen cada una de las configuraciones ideales de convertidores mostradas en la Figura 2. Todos los convertidores tienen un control PI para la regulación de voltaje. Para cada convertidor, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ¹:

i) Convertidor Buck :

$$L\dot{x}_1 = x_2 + uE \quad (1)$$

$$C\dot{x}_2 = x_1 - \frac{x_2}{R} \quad (2)$$

ii) Convertidor Boost:

$$L\dot{x}_1 = -(1-u)x_2 + E \quad (3)$$

$$C\dot{x}_2 = (1-u)x_1 - \frac{x_2}{R} \quad (4)$$

¹ Ver (Sira-Ramirez and Silva-Ortigoza 2006) para más detalles sobre el modelo de convertidores de segundo orden.

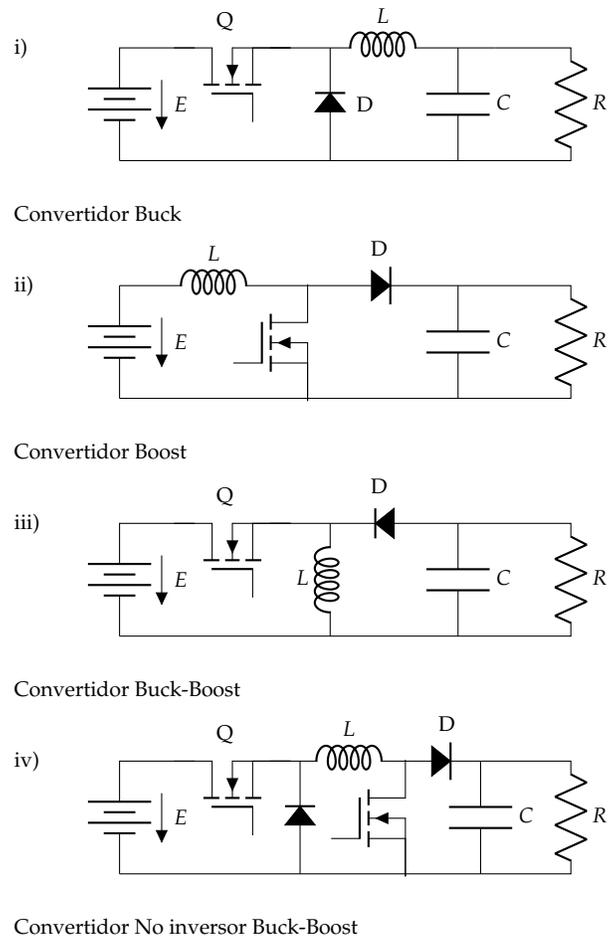


Figure 2. Tipos de convertidores más comunes en redes DC. i) Convertidor Buck (reducir) ii) Convertidor Boost (amplifier) iii) Convertidor Buck-boost iv) Convertidor no inversor Buck-Boost.

iii) Convertidor Buck-boost:

$$L\dot{x}_1 = (1 - u)x_2 + uE \tag{5}$$

$$C\dot{x}_2 = -(1 - u)x_1 - \frac{x_2}{R} \tag{6}$$

iv) Convertidor no inversor buck-boost:

$$L\dot{x}_1 = -(1 - u)x_2 + uE \tag{7}$$

$$C\dot{x}_2 = (1 - u)x_1 - \frac{x_2}{R} \tag{8}$$

Donde la variable de estados x_1 y x_2 representa la corriente que pasa por el inductor L y el voltaje en el condensador C respectivamente, la variable u representa el efecto de conmutación ideal del MOSFET Q que controla el voltaje de salida.

La señal de control u (control PI) que activa la conmutación del MOSFET se muestra a continuación:

$$u = zk_p + k_i x_3 \quad (9)$$

$$z = r - |x_2| \quad (10)$$

$$\dot{x}_3 = z \quad (11)$$

Donde k_p y k_i son las constantes proporcional e integradora respectivamente del control, z es el error del voltaje de circuito cerrado y r es la referencia del voltaje. La señal u es función de la variable de voltaje, por lo que es notorio que la no linealidad se manifiesta en las Ecuaciones (4), (6) y (8). se aplica un control PI convencional para la regulación de voltaje para cada uno de los convertidores propuestos. Pese a que los convertidores no lineales son de fase no mínima, para efectos de la investigación y generar modelos con características generales entre los convertidores se aplico dicho control PI por realimentación a todos por igual.

2.2. Estabilidad de Lyapunov

El teorema de Lyapunov es uno de los criterios más importantes para el análisis de estabilidad en sistemas dinámicos no lineales. El teorema se presenta a continuación para un punto de equilibrio en $x = 0$:

Teorema 1 (Criterio de Lyapunov (Hale 2009)). *Si hay una función definida positiva continua $V(x)$ en $\Omega \in \mathbb{R}^n$ con $V(0) = 0$ y $\dot{V} \leq 0$, entonces $x = 0 \in \Omega$ es una solución de $\dot{x} = f(x)$ y es estable. Si, además, \dot{V} es definido negativo en Ω , entonces la solución $x = 0$ es asintóticamente estable.*

El teorema de Lyapunov es muy general y útil para el análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales, sin embargo es difícil encontrar un candidato para la función de Lyapunov, de igual forma es difícil determinar cuándo una función es definida positiva o negativa. La siguiente sección mostrará cómo utilizar la optimización convexa para encontrar este tipo de funciones.

3. Optimización con SOS

Antes de analizar la metodología propuesta sobre convertidores, es necesario repasar algunos conceptos de la teoría de optimización convexa y su aplicación en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos:

Definición 1. *Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si para cualquier $x, y \in \Omega$, tenemos que*

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega \quad (12)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definición 2. *Una función de valor real $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si su dominio es convexo y para dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que.*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (13)$$

Para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq \lambda \leq 1$.

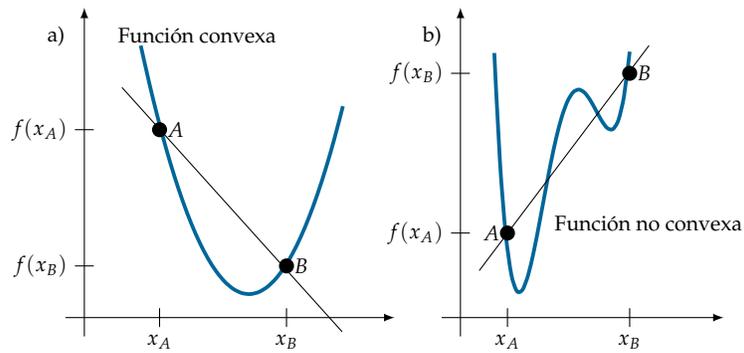


Figure 3. Ejemplo de una función convexa y una no convexa. En una función convexa, todos los puntos del intervalo AB deben estar por debajo de dicho segmento

La figura 3 muestra el caso de una función convexa y una no convexa, las funciones convexas son convenientes para problemas de optimización ya que en estas funciones existe un óptimo global, además existen algoritmos eficientes para encontrar este óptimo. En este caso, estamos interesados en un tipo más particular de funciones convexas, a saber, funciones que se pueden representar como una suma de cuadrados:

Definición 3. Un polinomio $p(x)$ es una suma de cuadrados (SOS) si existen polinomios $q_1(x), q_2(x), \dots, a_n(x)$ tales que:

$$p(x) = \sum_i^n q_i(x) \quad (14)$$

En general, un polinomio SOS es convexo y, por tanto, puede utilizarse en problemas de optimización convexa, además es posible transformar el problema en un modelo de programación semi-definida, que puede resolverse de manera eficiente en la práctica (ver (Blekherman et al. 2012) para más detalles sobre la optimización SOS).

4. Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad de los convertidores de segundo orden, es necesario generalizar todo el espacio de estado de los convertidores reescribiendo como se muestra a continuación:

$$M\dot{X} = P(x) \quad (15)$$

Donde

$$M = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Se construye un modelo incremental donde x_r representa un punto de equilibrio dado, quedando expresado de la siguiente manera:

$$\Delta x = x - x_r \quad (16)$$

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} \quad (17)$$

Reemplazando (16) en (15) se obtiene el modo incremental expresado de la siguiente manera:

Table 1. Parámetros generales de la red LVDC

Parámetros	valores				Unidades
	Buck	Boost	Buck-Boost	Buck-Boost No inversor	
Voltaje de entrada	380	70	250	200	[V]
Referencia	120	120	120	120	[V]
Inductancia	700	700	700	700	[mH]
Capacitancia	300	300	300	300	[μF]
Resistencia	100	100	100	100	[Ω]
K_p	0.0003	0.0003	0.001	0.001	-
K_i	0.036	0.06	0.0299	0.03	-

$$M\Delta\dot{x} = P(x_r + \Delta x) \quad (18)$$

Esta expresión es general para cada uno de los cuatro convertidores presentados en la Sección II. Ahora, se propone una función candidata de Lyapunov $V(\Delta x)$. Por tanto, las condiciones dadas por el teorema 1 se transforman en el siguiente problema de viabilidad:

Modelo de optimización 1. *Modelo de optimización para hallar la función de Lyapunov*

$$V(0) = 0 \quad (19)$$

$$V(\Delta x) \in \text{SOS} \quad (20)$$

$$-\dot{V}(\Delta x) = -\left(\frac{\partial V}{\partial \Delta x}\right)^\top M^{-1}P(x) \in \text{SOS} \quad (21)$$

Este modelo se aplica a cada uno de los convertidores y se obtiene una función de Lyapunov $V(x)$.

5. Resultados

Se simularon los convertidores con los valores de la Tabla 1, posteriormente se evaluó el modelo de optimización 1 en cada uno de los convertidores utilizando la herramienta SOSTOOLS de Matlab (A. Papachristodoulou and Parrilo 2013). Las funciones de Lyapunov obtenidas para cada convertidor se enuncian en las ecuaciones (22) a (25), pudiendo así demostrar la estabilidad de los sistemas.

De igual forma, es destacable mencionar que las funciones aunque sean positivas aparecen signos negativos, de la misma forma, es evidente que las funciones cumplen la condición $V(0) = 0$ debido a la ausencia de términos independientes en los polinomios resultantes. En todos los casos se obtuvo una función de Lyapunov de segundo orden con una estructura similar.

$$V_{\text{buck}} = 401.6\Delta x_1^2 - 860.6\Delta x_1\Delta x_2 - 1093.0\Delta x_1\Delta x_3 + 7527.0\Delta x_2^2 + 1038.0\Delta x_2\Delta x_3 + 748.9\Delta x_3^2 \quad (22)$$

$$V_{\text{boost}} = 1.457 \times 10^{-6}\Delta x_1^2 + 5.181 \times 10^{-11}\Delta x_1\Delta x_2 - 1.076 \times 10^{-7}\Delta x_1\Delta x_3 + 0.003414\Delta x_2^2 - 3.273 \times 10^{-7}\Delta x_2\Delta x_3 - 9.018 \times 10^{-8}\Delta x_3^2 \quad (23)$$

$$V_{\text{buck-boost}} = 2.037 \times 10^{-7}\Delta x_1^2 + 1.715 \times 10^{-12}\Delta x_1\Delta x_2 - 2.11 \times 10^{-8}\Delta x_1\Delta x_3 + 0.0004895\Delta x_2^2 + 2.081 \times 10^{-6}\Delta x_2\Delta x_3 - 1.065 \times 10^{-8}\Delta x_3^2 \quad (24)$$

$$V_{\text{ni-buck-boost}} = 2.435 \times 10^{-9}\Delta x_1^2 + 5.942 \times 10^{-17}\Delta x_1\Delta x_2 + 6.8 \times 10^{-11}\Delta x_1\Delta x_3 + 1.023 \times 10^{-5}\Delta x_2^2 + 3.634 \times 10^{-7}\Delta x_2\Delta x_3 + 7.733 \times 10^{-9}\Delta x_3^2 \quad (25)$$

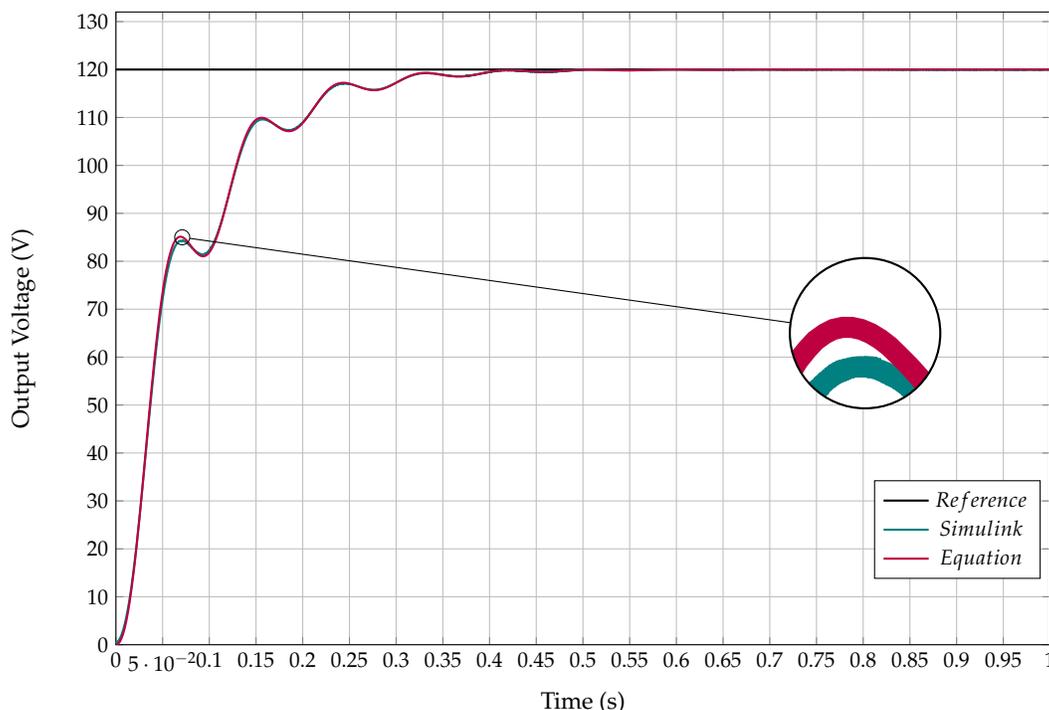


Figure 4. Voltaje de salida del convertidor Buck

Table 2. Parámetros de simulación

Convertidor	Simulink	Toolbox	
	Tiempo (s)	Tiempo (s)	Nº iteraciones
Buck	20.18	1.835	7
Boost	21	2.843	9
Buck-Boost	40.41	2.565	8
No inductor Buck-boost	39.62	2.641	1

Los modelos de convertidores también se simularon en Simulink para probar la estabilidad con los valores asignados. El resultado se muestra en las Figuras 4, 5, 6 y 7. Los modelos tienen el mismo comportamiento que las simulaciones y el sistema alcanzan el estado estacionario como se esperaba y por lo tanto son estables.

Por simple inspección, todos los convertidores tienen un comportamiento estable con el valor definido para las constantes k_p y k_i del control de voltaje de lazo cerrado. Por tanto, las funciones de Lyapunov reflejarán la estabilidad de los convertidores. Las simulaciones se realizaron en una computadora con una CPU Intel (R) core (TM) i5-6200U @ 2.30-2.40 GHz, con 8 GB pf de memoria RAM y un sistema operativo Windows 10 de 64 bits, los tiempos de las simulaciones son enlistado en la tabla 2.

6. Conclusiones

Se presentó la aplicación de la optimización de suma de cuadrados para encontrar funciones de Lyapunov en convertidores DC-DC de segundo orden. Se consideró un control PI convencional para la regulación de voltaje. La metodología es general para cualquier tipo de convertidor, pero en el caso de convertidores de segundo orden, se demostró que los polinomios de orden 2 eran suficientes para garantizar la estabilidad.

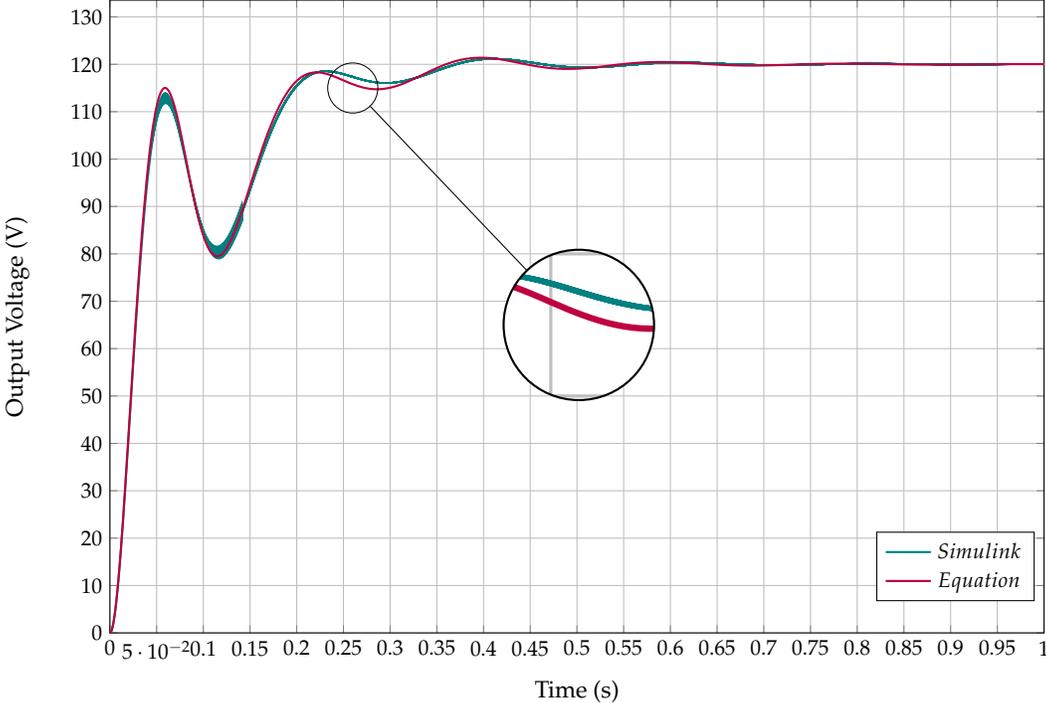


Figure 5. Voltaje de salida del convertidor Boost

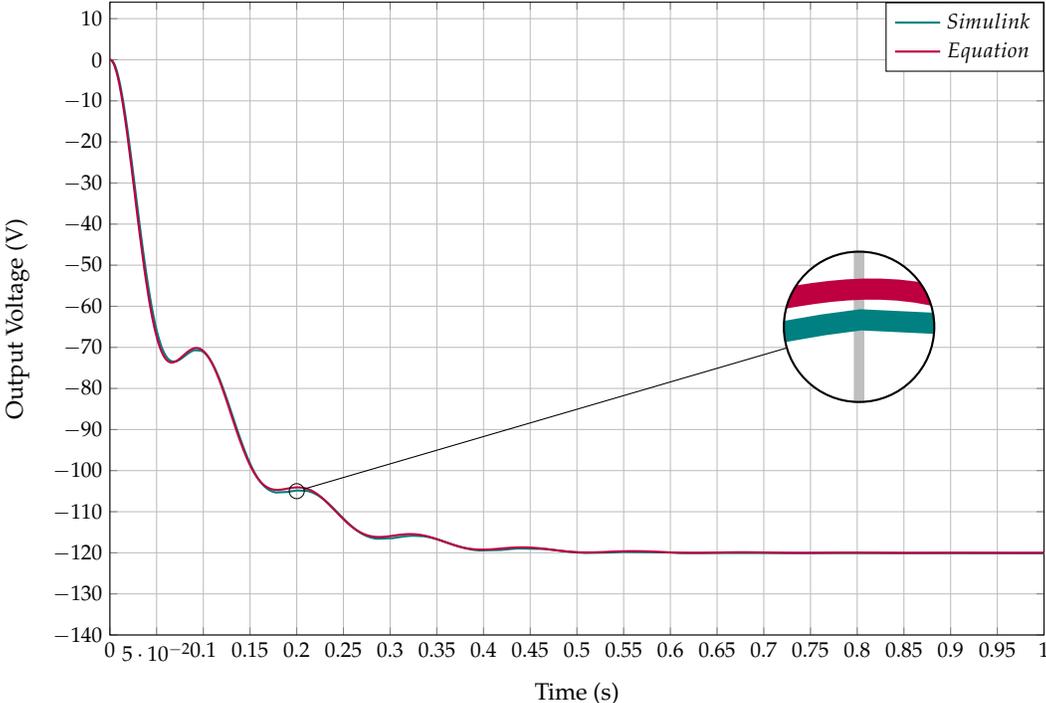


Figure 6. Voltaje de salida del convertidor Buck-boost

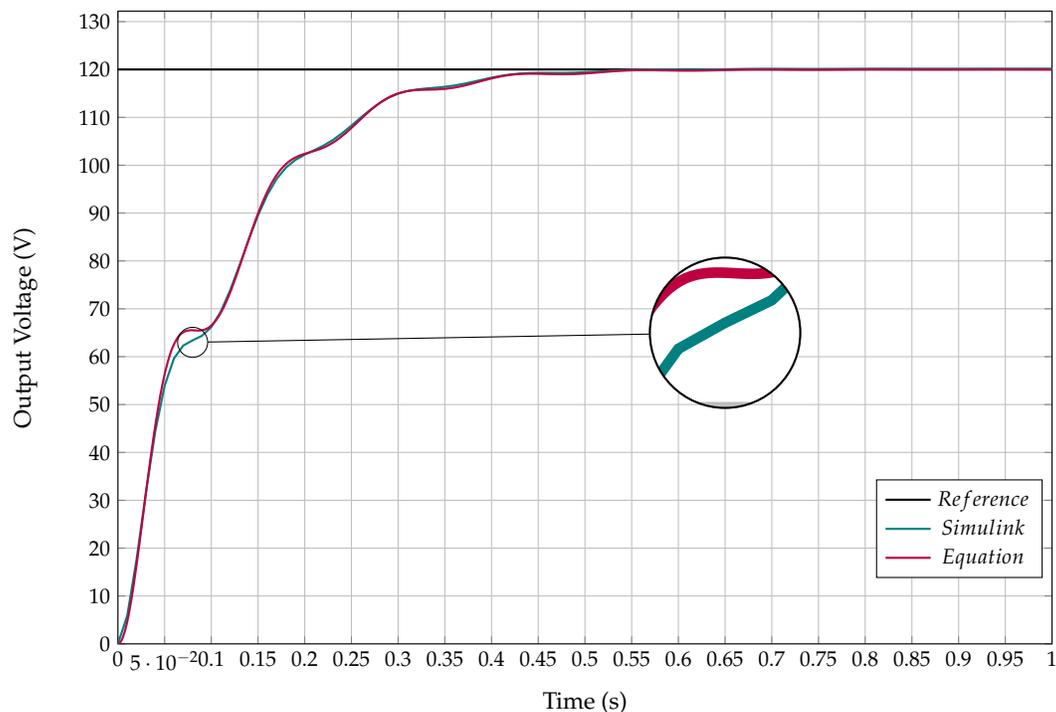


Figure 7. Voltaje de salida del convertidor no inversor Buck-boost

Soporte financiero

Esta investigación fue financiada por la Universidad Tecnológica de Pereira.

References

- A. Papachristodoulou, J. Anderson, G. V. S. P. P. S. and Parrilo, P. A. (2013). *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>. Available from <http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>, <http://www.cds.caltech.edu/sostools> and <http://www.mit.edu/~parrilo/sostools>.
- Blekherman, G., Parrilo, P. A., and Thomas, R. R. (2012). *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*. SIAM.
- Garcés, A. (2019). Stability analysis of dc-microgrids: A gradient formulation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, pages 1–9.
- Garcés, A. and Montoya, O.-D. (2019). A potential function for the power flow in dc microgrids: An analysis of the uniqueness and existence of the solution and convergence of the algorithms. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 30(5):794–801. doi:10.1007/s40313-019-00489-4.
- Hale, J. (2009). *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications.
- Joseph, S. C., Ashok, S., and Dhanesh, P. (2017). Low voltage direct current (lvdc) nanogrid for home application. In *2017 IEEE Region 10 Symposium (TENSymp)*, pages 1–5. IEEE.
- Li, H., Guo, Z., Ren, F., Zhang, X., and Zhang, B. (2017). A stability analysis method based on floquet theory for multi-stage dc-dc converters system. In *2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, pages 3025–3029. IEEE.
- Li, H., Ren, F., Shang, J., Zhang, B., Lü, J., and Qi, H. (2016). A novel large-signal stability analysis approach based on semi-tensor product of matrices with lyapunov stability theorem for dc-dc converters. In *2016 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, pages 1–5. IEEE.

Lopes, J. A. P., Madureira, A. G., and Moreira, C. C. L. M. (2013). A view of microgrids. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Energy and Environment*, 2(1):86–103.

Sadabadi, M. S., Shafiee, Q., and Karimi, A. (2017). Plug-and-play robust voltage control of dc microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 9(6):6886–6896.

Shang, J., Li, H., You, X., Zheng, T. Q., and Wang, S. (2015). A novel stability analysis approach based on describing function method using for dc-dc converters. In *2015 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, pages 2642–2647. IEEE.

Sira-Ramirez, H. J. and Silva-Ortigoza, R. (2006). *Control design techniques in power electronics devices*. Springer Science & Business Media.

VanAntwerp, J. G. and Braatz, R. D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4):363 – 385. doi:[https://doi.org/10.1016/S0959-1524\(99\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0959-1524(99)00056-6).



© 2020 by the authors. Licensee TESEA, Cartagena, Colombia. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).